## EXERCICE N°1 : 30' 6 points

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et dérivable sur ] - ½ , ½ ].

| x | -1/2 | | 0 | | 1/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f ' | ‖ | + | 2π | - | 0 |
| f | ‖ -∞ | ↗ | -2 | ↘ | -1 |

**1) a)** Montrer que f réalise une bijection de ] - ½ , ½ ] sur un intervalle J que l'on déterminera.

**b)** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en -2 et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$.

**c)** Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ sur J.

**2)** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} f^{-1}\left(-1-\frac{k}{n^2}\right)$.

**a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}\left(-1-\frac{2}{n}\right) \leq u_n \leq f^{-1}\left(-1-\frac{1}{n}\right)$.

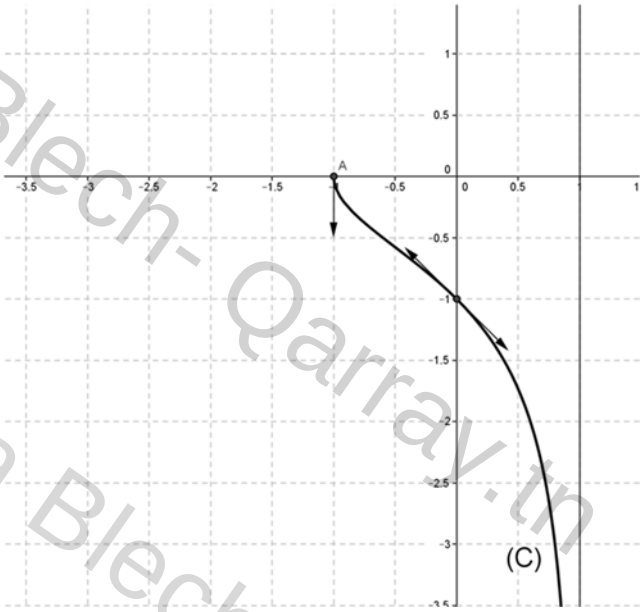
**b)** Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

**3)** On admet que f est définie sur ] - ½ , ½ ] par : $f(x) = \frac{-2}{1+\sin(\pi x)}$.

Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in ]-\infty , -1[$.

## EXERCICE N°2 : 40' 6 points

Sur la figure ci-contre, on donne (C) la représentation graphique d'une fonction h définie sur [-1 , 1[. T est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.




**1)** Par lecture graphique :

**a)** Déterminer h(0), h(-1), h'(0), $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1}$.

**b)** Dresser le tableau de variation de h et montrer que h réalise une bijection de [-1 , 1[ sur un intervalle J a préciser.

**c)** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h^{-1}(x)$ , $\left(h^{-1}\right)'(-1)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h^{-1}(x)+1}{x}$.

**d)** Tracer la courbe (C') de $h^{-1}$ dans le même repère que (C).

**2)** Soit la fonction f définie sur [- π/2 , π/2[ par $f(x) = h(\sin x)$.

**a)** Montrer que f est dérivable sur ]-π/2 , π/2[ et que f est une bijection de [-π/2 , π/2[ sur ]-∞ , 0].

**b)** On admet que $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$, Etudier la dérivabilité de $f^{-1}$ sur ]-∞ , 0] et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn